

# Berechnung der Rollstrecke beim Start konventioneller Flugzeuge

## Inhalt

- 1 Einleitung
  - 2 Luftfahrtvorschriften zur Startrollstrecke
  - 3 Definitionen zur Startrollstrecke
  - 4 Bedeutung der Startrollstrecke
  - 5 Herleitung der Grundgleichung
  - 6 Berechnung der Startrollstrecke (1) - konstante Werte für Schub, Widerstand und Auftrieb
  - 7 Abschätzen von Schub, Widerstand, Auftrieb und Rollreibung beim Start
  - 8 Interpretation der Ergebnisse
  - 9 Berechnung der Startrollstrecke (2) - variabler Widerstand und Auftrieb
  - 10 Berechnung der Startrollstrecke (3) - numerische Integration der Differentialgleichung
  - 11 Beispiel
  - 12 Literatur
- Anhang

## 1 Einleitung

Bei Start und Landung befindet sich das Flugzeug nahe am Boden. Daher ist das Unfallrisiko in diesen beiden Flugphasen besonders hoch. Dies zeigt die Statistik: mehr als 50% aller Flugunfälle treten bei Start und Landung auf.

Um das Risiko beim Start so gering wie möglich zu halten, wurden Vorschriften speziell auch für die Startphase erlassen. Diese Vorschriften definieren:

1. die Mindestanforderungen an das Flugzeug bei der *Zulassung* (**certification**),
2. die erforderlichen Angaben im *Flughandbuch*, (**flight manual**)
3. den zulässigen *Betrieb* des Flugzeugs beim Start (**operation**).

Der Flugzeughersteller muß sich mit jedem dieser Punkte auseinandersetzen, der Betreiber des Flugzeugs muß Punkt 3 beachten - basierend auf den Angaben im Flughandbuch (Punkt2).

Die Konzepte, die den heutigen Vorschriften über die Startphase zugrunde liegen, wurden erst nach dem zweiten Weltkrieg erarbeitet [WAGENMAKERS 91]. Auch heute noch werden *im Detail* Änderungen vorgenommen, um neue technische Entwicklungen und Erkenntnisse aus Flugunfällen zu berücksichtigen. Daraus ergibt sich folgendes:

Ein praxisrelevantes Vorgehen für Berechnungen während der Startphase muß neben der Anwendung der Mechanik auch die Forderungen der jeweiligen Vorschriften einbeziehen.

## 2 Luftfahrtvorschriften zur Startrollstrecke

**Tabelle 1** zeigt eine Auswahl von Vorschriften, die bei zivilen Flugzeugen in der Startphase eine Anwendung finden. Flugleistungsangaben für militärische Flugzeuge können z.B. [MIL-C-005011B] und [AS-5263] entnommen werden.

**Tabelle 1:** Auswahl ziviler Vorschriften zur Startphase

aircraft type	normal, utility and aerobatic aeroplanes	commuter aeroplanes	large aeroplanes (JAR) transport category airplanes (FAR)
characteristics	passenger seats ≤ 9 MTOW ≤ 5700 kg	passenger seats ≤ 19 MTOW ≤ 8600 kg propeller driven twin-engined	MTOW > 5700 kg
aircraft certification	<b>JAR23 / FAR 23</b> § 23.45 General § 23.49 Stalling speed § 23.51(a),(b) Take-off speeds § 23.53(a),(b) Take-off performance	<b>JAR23 / FAR 23</b> § 23.45 General § 23.49 Stalling speed § 23.51(c) Take-off speeds § 23.53(c) Take-off performance § 23.55 Accelerate-stop distance § 23.57 Take-off path § 23.59 Take-off distance and <b>take-off run</b> § 23.61 Take-off flight path	<b>JAR25 / FAR 25</b> § 25.103 Stall speed § 25.105 Take-off § 25.107 Take-off speeds § 25.109 Accelerate-stop distance § 25.111 Take-off path § 25.113 Take-off distance and <b>take-off run</b> § 25.115 Take-off flight path
interpretative material to aircraft certification	<b>FAR:</b> Advisory Circular AC23-8A: "Flight Test Guide for Certification of Part 23 Airplanes"		<b>JAR:</b> Advisory Circular, Joint (ACJ) Advisory Material Joint (AMJ) included in JAR25. <b>FAR:</b> Advisory Circular AC25-7: "Flight Test Guide for Certification of Transport Category Airplanes"
flight manual	<b>JAR, FAR:</b> § 23.1587 Performance information		<b>JAR, FAR:</b> § 25.1587 Performance information <b>JAR:</b> § 25X1591 Supplementary performance information
operation	<b>JAR:</b> JAR-OPS1 Commercial Air Transportation (Aeroplanes) JAR-OPS 1.470 Applicability JAR-OPS 1.490 Take-off, Class A JAR-OPS 1.530 Take-off, Class B JAR-OPS 1.565 Take-off, Class C <b>FAR:</b> FAR 121.177 Airplanes: Reciprocating engine powered: Takeoff limitations FAR 121.189 Airplanes: Turbine engine powered: Takeoff limitations		

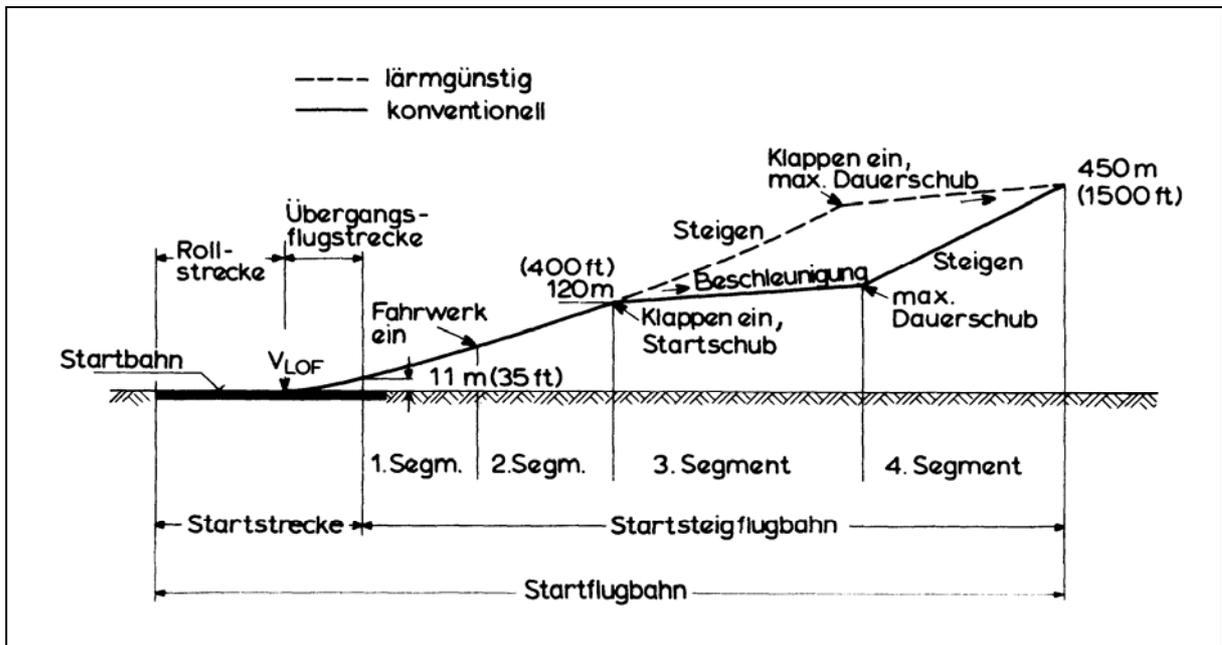
### 3 Definitionen zur Startrollstrecke

Die Startphase erstreckt sich vom Startpunkt am Anfang der Startbahn (das Flugzeug steht mit Geschwindigkeit  $v_G = 0$ ) bis zu einem Punkt der Flugbahn in 1500 ft Höhe über der Startfläche.

**Bild 1** zeigt diese *Startflugbahn (take-off path)*.

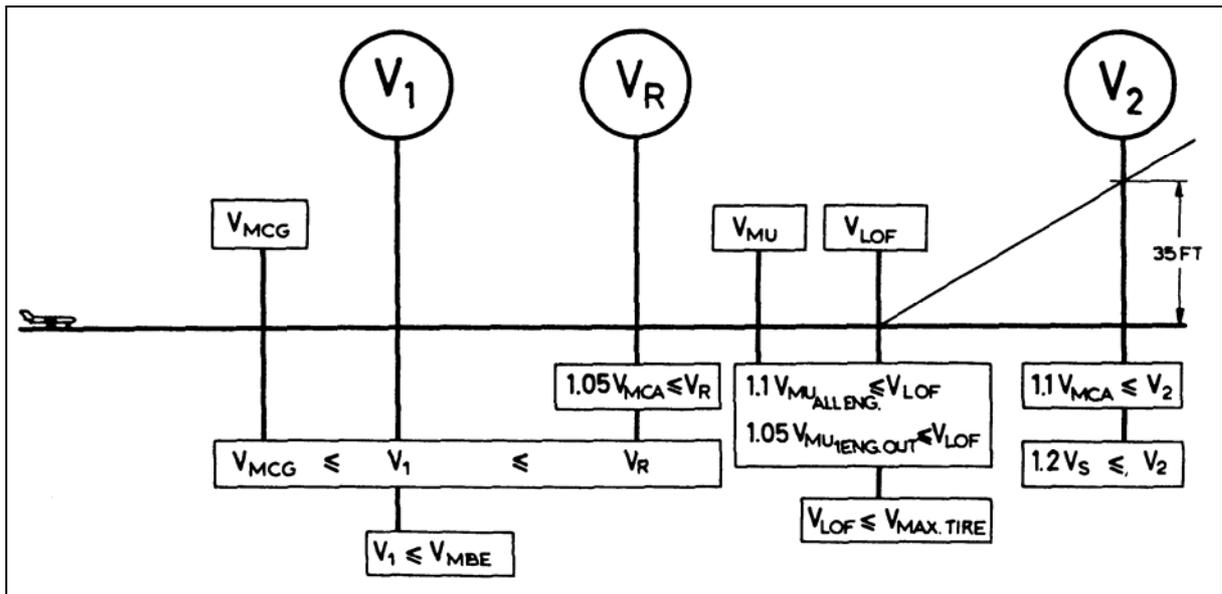
*Startrollstrecke* **ground roll**, lift-off distance (gemäß AC25-7 Fig. 13-3/4, siehe Bild 3):  
 $s_G$  ist die Strecke vom Startpunkt (**line up point**) bis zum Abhebezeitpunkt (**lift-off point**).

Auf der Startbahn wird das Flugzeug bis zur *Abhebegeschwindigkeit*  $v_{LOF}$  beschleunigt. Je größer die *Abhebegeschwindigkeit*  $v_{LOF}$  ist, um so größer ist auch die Startrollstrecke. Die Abhebegeschwindigkeit  $v_{LOF}$  ist festgelegt durch die Vorschriften aus einem Zusammenspiel verschiedener Geschwindigkeiten beim Start. Einen Überblick über diese Geschwindigkeiten gibt **Bild 2**. Im folgenden Text werden die Geschwindigkeiten aus Bild 2 definiert. Die **Definitionen** sind für große Flugzeuge von Bedeutung, die **nach JAR25 / FAR25** zugelassen werden. Für Flugzeuge, die nach JAR23 / FAR23 zugelassen werden, gibt es geringfügige Vereinfachungen<sup>1</sup>.



**Bild 1:** Startflugbahn, Definitionen und Bezeichnungen

<sup>1</sup> Für Flugzeuge die nach JAR23/FAR23 zugelassen werden gelten im wesentlichen die gleichen Definitionen und Zusammenhänge. Vereinfachend wirkt, daß kein Bezug genommen wird auf  $v_{MU}$ . Für Flugzeuge der Klassen "normal", "utility" und "aerobatic" beträgt die Hindernishöhe (screen height) 50 ft. Für einmotorige Flugzeuge dieser Klassen muß für die Rotiergeschwindigkeit gelten  $v_{s1} \leq v_R$ , darüber hinaus entfällt der Bezug auf  $v_{MC}$ .



**Bild 2:** Definition der Geschwindigkeiten beim Start gemäß JAR25 / FAR25

**Abhebegeschwindigkeit  $v_{LOF}$  lift-off speed (JAR25.107(f)):**

$v_{LOF}$  is the calibrated airspeed at which the aeroplane first becomes airborne.

**Mindestfluggeschwindigkeit in Bodeneffekt  $v_{MU}$  minimum unstick speed (JAR25.107(d)):**

$v_{MU}$  is the calibrated airspeed at and above which the aeroplane can safely lift off the ground.

**Maximale Reifengeschwindigkeit  $v_{max,tire}$  maximum tire speed:**

$v_{max,tire}$  ist die höchste für einen Reifen zulässige Geschwindigkeit.

**Rotiergeschwindigkeit  $v_R$  rotation speed (JAR25.107(e)) (siehe Bild 2):**

$v_R$ , in terms of calibrated airspeed, ... may not be less than

- $v_1$  (takeoff decision speed)
- $1.05 v_{MCA}$
- the speed in accordance with ... reaching  $v_2$  before reaching a height of 35 ft above the take-off surface.

**Sichere Startgeschwindigkeit  $v_2$  takeoff safety speed (siehe Bild 2)**

JAR25.107(b),(c):

$v_2$ , in terms of calibrated airspeed, ... may not be less than

- $1.2 v_S$
- $1.1 v_{MCA}$

JAR25.111(c)(2):

The aeroplane must reach  $v_2$  before it is 35 ft above the take-off surface.

*Mindestfluggeschwindigkeit bei Triebwerksausfall, Startsteigflug*  $v_{MC} = v_{MCA}$  **minimum control speed, take-off climb** (JAR1; JAR25.149(b))

$v_{MC}$  is the calibrated airspeed, at which when the critical engine is suddenly made inoperative, it is possible to recover control of the aeroplane with that engine still inoperative, and maintain straight flight ... with an angle of bank of not more than 5°.

*Überziegeschwindigkeit*  $v_S$  **stall speed** (JAR25.103(b)):

$v_S$  is ... the minimum calibrated airspeed obtained when the aeroplane is stalled (or the minimum steady flight speed at which the aeroplane is controllable with the longitudinal control on its stop) ... [stall] entry rate not exceeding 1 knot per second.

Weder  $v_{MU}$  noch  $v_{LOF}$  sind im Flughandbuch notiert. Der Pilot richtet sich statt dessen nach den Geschwindigkeiten  $v_R$  und  $v_2$ .  $v_R$  muß gemäß Flughandbuch so gewählt werden, daß die Bedingungen für  $v_{LOF}$  und  $v_2$  eingehalten werden.

Zusammenfassend: Die *Startrollstrecke* endet am *Abhebezeitpunkt*. Dieser ist durch die *Abhebegeschwindigkeit*  $v_{LOF}$  bestimmt. Abheben kann das Flugzeug erst ab der *Mindestfluggeschwindigkeit in Bodeneffekt*  $v_{MU}$ . Die *Abhebegeschwindigkeit*  $v_{LOF}$  muß jedoch höher sein als  $v_{MU}$ . Dies wird gemacht um

- Sicherheit beim Abheben zu erreichen (normal:  $v_{LOF} \geq 1,1 \cdot v_{MU}$ ),
- eine Auftriebsreserve für den Abhebebogen zu haben,
- die Geschwindigkeit  $v_2$  bis zum Überflug über die *Hindernishöhe* (JAR25 / FAR25: 35 ft) zu erreichen.

Für die Praxis:

**In vielen Fällen liegt  $v_{LOF}$  nur wenige Knoten unterhalb von  $v_2$**

## 4 Bedeutung der Startrollstrecke

Die Startrollstrecke hat in der Praxis folgende Bedeutung

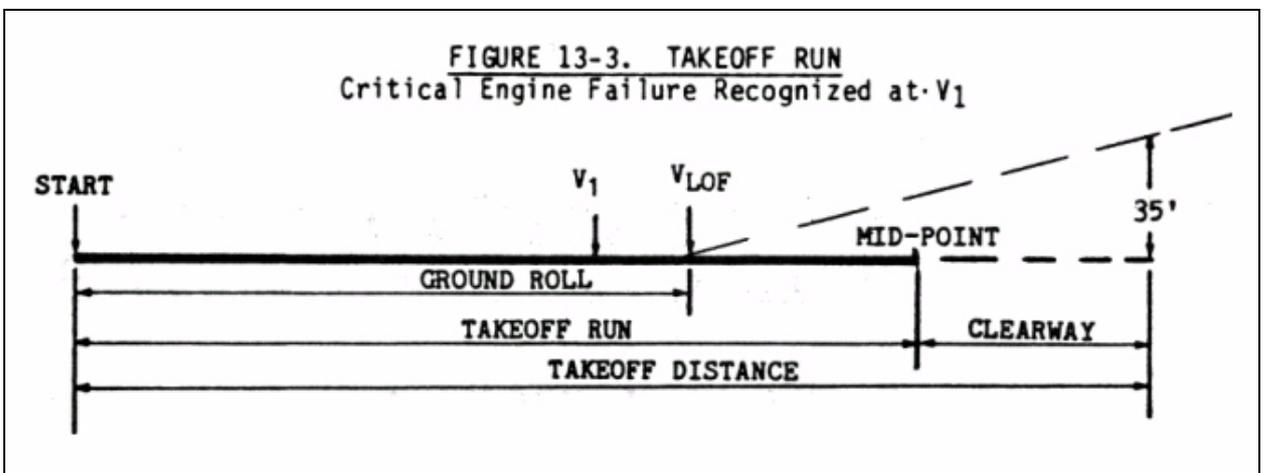
1. Die *Startrollstrecke* (**ground roll**) ist ein Element bei der Berechnung der *Startstrecke* (**take-off distance**). Die Startstrecke bezieht sich auf das Überfliegen der Hindernishöhe (screen height) von 35 ft bzw. 50 ft. **Die Lage des Abhebezeitpunktes auf der Startbahn ist jedoch nicht von Bedeutung.**
2. Die *Startrollstrecke* ist ein Element bei der Berechnung der *Startlaufstrecke* (**take-off run**). Die Startlaufstrecke ist von Bedeutung für Flugzeuge nach JAR25 / FAR25 sowie für Commuter-Flugzeuge gemäß JAR23 / FAR23 wenn ein *Freifläche* (**clearway**) ausgenutzt

werden soll. **Die Lage des Abhebepunktes auf der Startbahn bestimmt die Startlaufstrecke maßgeblich.**

Die Definition der Startlaufstrecke (take-off run) aus JAR25 / FAR25 §25.113(b) bei Triebwerksausfall ist hier erklärt mit **Bild 3**. Wenn alle Triebwerke arbeiten, dann beträgt die Startlaufstrecke (wegen eines nach §25.113(b) geforderten Sicherheitszuschlags) das 1,15-fache der Strecke nach der Definitionen aus Bild 3. Die Freifläche darf nicht mehr als die Hälfte der Startbahnlänge betragen (FAR121.189(c)(2)).

Durch die Berechnung der Startrollstrecke soll (in Verbindung mit einer Berechnung der Startstrecke) sichergestellt werden, daß gilt:

$\text{Startlaufstrecke (take-off run)} \leq \text{verfügbare Startlaufstrecke (take-off run available, TORA)}$
---



**Bild 3:** Startlaufstrecke (**take-off run**), Definition bei Triebwerksausfall nach AC 25-7 "Flight Test Guide for Certification of Transport Category Airplanes"

## 5 Herleitung der Grundgleichung

Während des Rollens wirken auf ein Flugzeug *Schub*  $T$  (**thrust**), *Widerstand*  $D$  (**drag**), *Auftrieb*  $L$  (**lift**), *Rollreibung*  $F_f$  (**rolling friction**) sowie die Gewichtskraft  $m \cdot g$  (**weight**). Siehe dazu **Bild 4**.

Summe der Kräfte in x-Richtung:

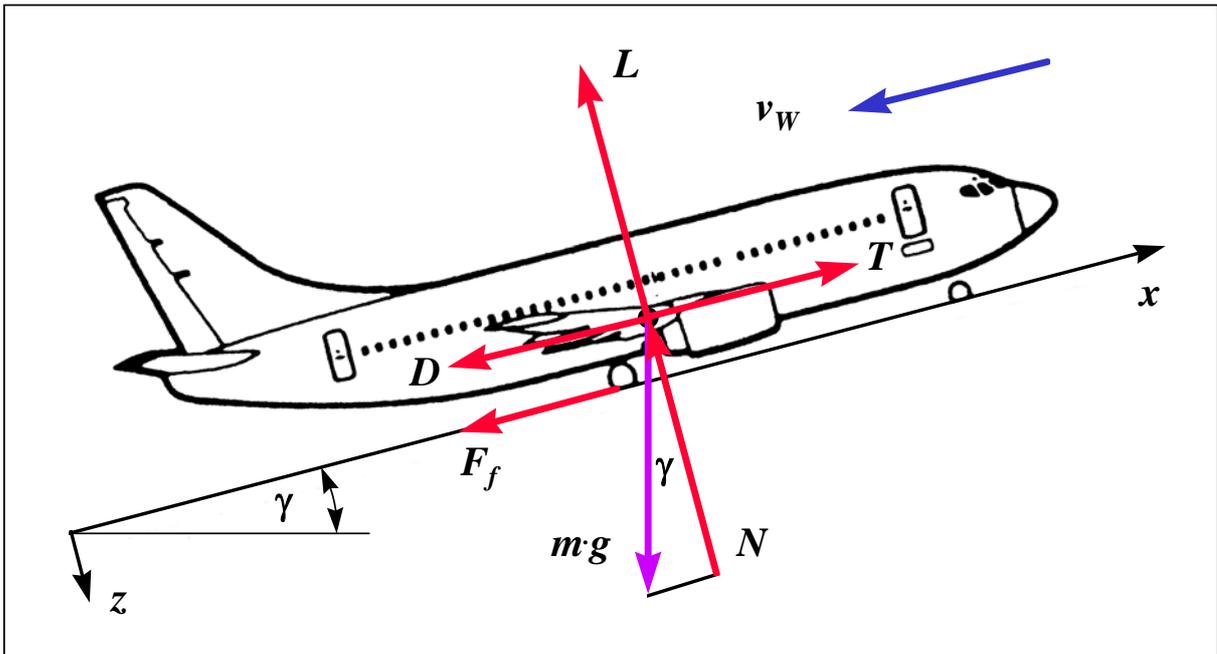
$$T - D - F_f - m \cdot g \cdot \sin \gamma = m \cdot a = m \cdot \frac{dv_G}{dt} = m \cdot \frac{dv_G}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = m \cdot v_G \cdot \frac{dv_G}{dx} \quad (1)$$

Summe der Kräfte in z-Richtung:

$$m \cdot g \cdot \cos \gamma - L - N = 0 \quad . \quad (2)$$

Die Rollreibung (für kleine Startbahnneigungswinkel  $\gamma$ ) beträgt:

$$F_f = \mu \cdot N = \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos \gamma - L) \approx \mu \cdot (m \cdot g - L) \quad . \quad (3)$$



**Bild 4:** Kräfte am Flugzeug während des Rollens auf einer geneigten Startbahn

Die Startrollstrecke ergibt sich aus der Integration von Gleichung (1) über die Rollgeschwindigkeit  $v_G$ .  $v_G$  ist die Geschwindigkeit gegenüber dem Boden. Es wird integriert vom Startpunkt (0) bis zum Abhebezeitpunkt (1). Am Startpunkt beträgt die Rollgeschwindigkeit  $v_G = 0$ . Am Abhebezeitpunkt beträgt die erforderliche Rollgeschwindigkeit  $v_G = v_{LOF} - v_W$ . Bei *Gegenwind (headwind)* ist  $v_W$  positiv und das Flugzeug kann bereits bei niedrigerer Rollgeschwindigkeit abheben als bei Windstille. Bei *Rückenwind (tailwind)* ist  $v_W$  negativ anzusetzen. Die erforderliche Rollgeschwindigkeit im Abhebezeitpunkt ist dann höher als bei Windstille. Die Grundgleichung zur Berechnung der Startrollstrecke lautet:

$$s_G = \int_0^1 dx = m \cdot \int_0^{v_{LOF} - v_W} \frac{v_G}{T - D - \mu \cdot (m \cdot g - L) - m \cdot g \cdot \sin \gamma} dv_G \quad . \quad (4)$$

$T$ ,  $D$  und  $L$  sind Funktionen der Rollgeschwindigkeit  $v_G$ . Daher erfordert die Integration noch einige weitere Überlegungen. Drei Lösungsansätze sollen vorgestellt werden:

1. Integration unter der Annahme, daß der *Schubüberschuß (excess thrust)*

$$T_{excess} = T - D - \mu \cdot (m \cdot g - L) - m \cdot g \cdot \sin \gamma$$

konstant ist.

2. Integration unter der Annahme, daß  $D$  und  $L$  Funktionen der Rollgeschwindigkeit  $v_G$  sind.
3. Numerische Integration unter Berücksichtigung aller Einflüsse.

Weiterhin wird eine "Abschätzgleichung" der Rollstrecke hergeleitet zur Interpretation der Zusammenhänge der Parameter.

## 6 Berechnung der Startrollstrecke (1) - konstante Werte für Schub, Widerstand und Auftrieb

Unter der Annahme, daß  $T$ ,  $D$  und  $L$  konstant sind, kann das Integral in Gleichung (4) leicht gelöst werden. Für die Startrollstrecke erhalten wir dann (als erste Gleichung)

$$s_G = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot (v_{LOF} - v_W)^2}{T - D - \mu \cdot (m \cdot g - L) - m \cdot g \cdot \sin \gamma} \quad (5)$$

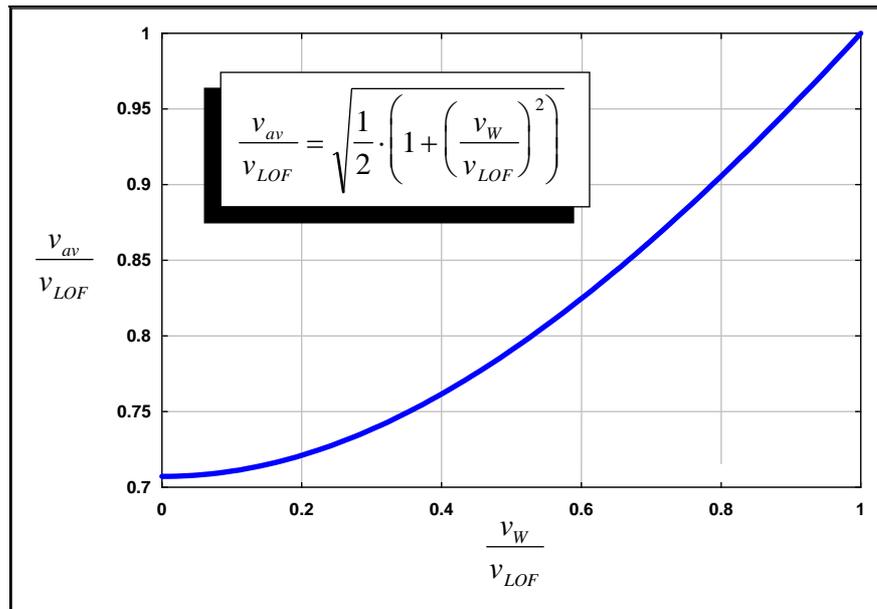
$T$ ,  $D$  und  $L$  hängen vom Staudruck  $q$  ab. Mit einem mittleren Staudruck  $q_{av}$  können für  $T$ ,  $D$  und  $L$  geeignete mittlere Werte berechnet werden. Ein mittlerer Staudruck wird aus den Staudrücken im Startpunkt (0) und dem Abhebepunkt (1) berechnet: Wenn die Windgeschwindigkeit  $v_W$  berücksichtigt wird, so herrscht im Startpunkt (0) ein Staudruck entsprechend der Windgeschwindigkeit  $v_W$ . Das Flugzeug hebt bei einer Anströmgeschwindigkeit  $v_{LOF}$  ab. Dies ist genauso wie bei Windstille. Unter Beachtung dieser Zusammenhänge ist

$$q_{av} = \frac{q_0 + q_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\rho}{2} \cdot v_W^2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_{LOF}^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_{LOF}^2 \cdot \left( 1 + \left( \frac{v_W}{v_{LOF}} \right)^2 \right) \quad (6)$$

Eine mittlere Anströmgeschwindigkeit des Flugzeugs  $v_{av}$  kann aus dem mittleren Staudruck mit Hilfe des Ansatzes  $q_{av} = \frac{\rho}{2} v_{av}^2$  berechnet werden. Mit Gleichung (6) ist dann die mittlere Anströmgeschwindigkeit des Flugzeugs unter Beachtung des Windeinflusses

$$v_{av} = v_{LOF} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left( 1 + \left( \frac{v_W}{v_{LOF}} \right)^2 \right)} \quad (7)$$

Diese Beziehung ist - in dimensionsloser Form - dargestellt in **Bild 5**.



**Bild 5:** Mittlere Anströmgeschwindigkeit des Flugzeugs beim Startlauf unter Beachtung des Windinflusses

Für eine vereinfachte Berechnung der Startrollstrecke bei Windstille  $v_W = 0$ , nutzen wir eine mittlere Anströmgeschwindigkeit des Flugzeugs zur Bestimmung von *Schub*  $T$ , *Widerstand*  $D$  und *Auftrieb*  $L$ :

$$v_{av} = 0,707 \cdot v_{LOF} \quad .$$

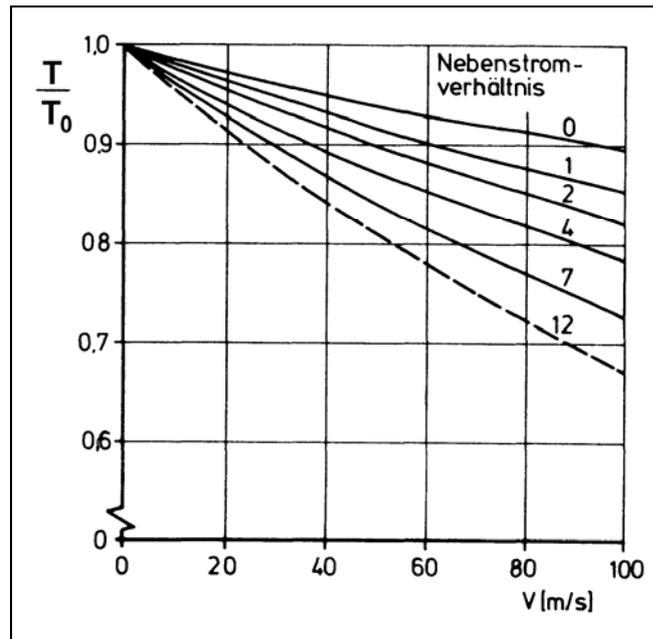
## 7 Abschätzen von Schub, Widerstand, Auftrieb und Rollreibung beim Start

Der *Schub* eines Triebwerkes während des Startlaufs kann abhängig von der Anströmgeschwindigkeit  $v$  abgeschätzt werden nach **Bild 6**.

Bei der Berechnung von *Auftrieb* und *Widerstand* müssen Auftriebs- und Widerstandsbeiwert unter Berücksichtigung des Bodeneffekts verwandt werden (Index:  $G$  für "ground"):

$$L = \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot C_{L,G} \cdot S \qquad D = \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot C_{D,G} \cdot S \qquad (8)$$

Es ist:  $\rho$  Luftdichte,  $S$  Flügelfläche und  $v = v_G + v_W$  die Anströmgeschwindigkeit. Für den Auftriebs- und Widerstandsbeiwert im Bodeneffekt  $C_{L,G}$  und  $C_{D,G}$  gibt es Abschätzmethoden in [HOAK 78]. Eine einfache Abschätzung zum Widerstandsbeiwert im Bodeneffekt enthält [MCCORMICK 79]. Die Polare wird danach durch einen Parameter  $\phi \leq 1$  modifiziert.



**Bild 5:** Abschätzung des Triebwerksschubs während des Startlaufs [BRÜNING 93]

$$C_{D,G} = C_{D,0} + \phi \cdot \frac{C_L^2}{\pi \cdot e \cdot \Lambda} \quad (9)$$

$$\phi = \frac{(16 \cdot h / b)^2}{1 + (16 \cdot h / b)^2} \quad (10)$$

$C_{D,0}$  **zero-lift drag coefficient** siehe z.B. [ROSKAM 90] (Kapitel 5), typische Werte:  
 $0,015 \leq C_{D,0} \leq 0,04$  (eingefahrene Klappen,  $C_{D,0}$  abhängig von der Machzahl),

$e$  **Oswald's efficiency factor** siehe z.B. [ROSKAM 90] (S. 132), typische Werte:  
 $0,7 \leq e \leq 1,0$

$\Lambda$  **Flügelstreckung (aspect ratio)**  $\Lambda = b^2 / S$ ,

$h$  Höhe des Flügels über dem Boden,

$b$  **Spannweite (wing span)**.

Der *Anstellwinkel (angle of attack)* des Flügels  $\alpha$  für die Ermittlung des Auftriebsbeiwertes in freier Strömung  $C_L$  ergibt sich aus der Geometrie des rollenden Luftfahrzeugs.

Die *Rollreibung*  $F_f$  wird nach Gleichung (3) berechnet. Widerstandskoeffizienten der Rollreibung sind in **Tabelle 2** gegeben. Nach [CURREY 88] nimmt der Widerstandskoeffizient der Rollreibung mit der Rollgeschwindigkeit zu. Entsprechende Daten können evtl. vom Reifenhersteller bezogen werden. JAR25 AMJ25X1591 enthält weitere Informationen zur

Berechnung des Rollwiderstandes auf Startbahnen mit stehendem Wasser, Schneematsch oder losem Schnee.

**Tabelle 2:** Widerstandskoeffizienten der Rollreibung  $\mu$

Oberfläche	[KOHLMAN 92]	[CURREY 88]	[TORENBEEK 88]
Beton oder Asphalt, trocken oder feucht	0,02 bis 0,05	0,008 bis 0,02	0,02
fester Schnee	0,02	-	-
Eis	0,02	-	-
Kies	-	-	0,04
trockenes <i>kurzes</i> Gras, fester Boden	0,05	0,05	0,05
trockenes <i>langes</i> Gras, fester Boden	0,10	-	0,10
weicher Boden	0,10 bis 0,30	0,10	0,10 bis 0,30

## 8 Interpretation der Ergebnisse

Die erste aufgestellte Gleichung zur Berechnung der Startrollstrecke (Gleichung 5) schreiben wir zur Interpretation in der Form

$$s_G = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot v_{LOF}^2 \cdot \left(1 - \frac{v_W}{v_{LOF}}\right)^2}{T - D - \mu \cdot (m \cdot g - L) - m \cdot g \cdot \sin \gamma} \quad (11)$$

Wir halten fest:

1. Bei gegebener Flugzeugmasse  $m$  ist die Startrollstrecke proportional dem Quadrat der Abhebegeschwindigkeit  $v_{LOF}$ :

$$s_G \propto v_{LOF}^2 \quad .$$

Der Pilot darf die Rotiergeschwindigkeit  $v_R$  und damit auch  $v_{LOF}$  nicht übermäßig überschreiten, weil die Startrollstrecke überproportional mit  $v_{LOF}$  anwächst.

2. Die Startrollstrecke mit Windeinfluß  $s_{G,wind}$  läßt sich näherungsweise (Annahme:  $T_{excess}$  ist mit und ohne Wind gleich) aus der Startrollstrecke bei Windstille  $s_{G,without wind}$  berechnen. Es gilt

$$s_{G,wind} \approx s_{G,without wind} \cdot \left(1 - \frac{v_W}{v_{LOF}}\right)^2 \quad (12)$$

3. Die Startrollstrecke ist umgekehrt proportional zum *Schubüberschuß*  $T_{excess}$

$$s_G \propto \frac{1}{T - D - \mu \cdot (m \cdot g - L) - m \cdot g \cdot \sin \gamma} .$$

Ein großer Schubüberschuß verkürzt die Startrollstrecke.

4. Feststellung: Rollt das Flugzeug mit hohem Anstellwinkel (evtl. Bugrad angehoben), dann erhöht sich der Auftrieb  $L$ . Damit sinkt die Rollreibung  $F_f$ , aber es steigt der Widerstand  $D$ . Die Startrollstrecke wird dann am kürzesten, wenn  $D + \mu \cdot (m \cdot g - L)$  minimal wird.

Abschätzung des Anstellwinkels für die kürzeste mögliche Startrollstrecke:

- $C_L = C_{L,0} + 2\pi \cdot \alpha$  in Gleichung (9) einsetzen. Achtung hier gilt:  $\alpha$  in rad!  
Typische Werte für  $C_{L,0}$  liegen zwischen 0 (symmetrisches Profil) und 0,4.
- $D$  und  $L$  entsprechend den Gleichungen (8) bis (11) in  $D + \mu \cdot (m \cdot g - L)$  einsetzen.
- Nach dem Einsetzen, den Ansatz  $\frac{d}{d\alpha} [D + \mu \cdot (m \cdot g - L)] = 0$  nach  $\alpha$  auflösen.

Ergebnis:  $s_G$  wird minimal wenn  $\alpha = \alpha_{opt}$  gewählt wird gemäß

$$\alpha_{opt} = \frac{\mu \cdot e \cdot \Lambda}{4 \cdot \phi} - \frac{C_{L,0}}{2\pi} . \quad (13)$$

Zu beachten ist dabei, daß  $\alpha$  nicht größer als der maximale Anstellwinkel  $\alpha(C_{L,max})$  gewählt werden darf.

Zur weiteren Interpretation wird Gleichung (5) umgeformt. Wir berechnen aus dem Ansatz

$$mg = L = \frac{\rho}{2} v_S^2 \cdot C_{L,max} \cdot S \text{ die Überziehggeschwindigkeit}$$

$$v_S = \sqrt{\frac{2g}{\rho} \cdot \frac{m}{S} \cdot \frac{1}{C_{L,max}}} . \quad (14)$$

Folgende weitere Annahmen werden getroffen:

- $v_{LOF}$  ist nur unbedeutend geringer als  $v_2$ . Darum setzen wir  $v_{LOF} = 1,2 \cdot v_S$ .
- Der Start findet statt auf ebener Bahn bei Windstille.
- Der Schub  $T$  ist viel größer als Widerstand  $D$  und Rollreibung  $F_f$ .

Wir berücksichtigen die Annahmen und setzen Gleichung (14) ein in Gleichung (5) und erhalten eine Abschätzgleichung für die Startrollstrecke:

$$s_G = 1,44 \cdot g \cdot \frac{m^2}{\rho \cdot C_{L,max} \cdot S \cdot T} = \frac{1,44}{\rho \cdot C_{L,max}} \cdot \frac{m / S}{T / (m \cdot g)} \quad (15)$$

Diese Gleichung gibt zu kleine Werte für die Startrollstrecke, weil die Widerstände vernachlässigt wurden und ist daher für "ernsthafte" Rechnungen nicht geeignet! Sie dient jedoch zur weiteren Erklärung von Zusammenhängen. Basierend auf Gleichung (15) können weiterhin eindrucksvolle statistische Auswertungen zur Start(roll)strecke verschiedener Flugzeuge durchgeführt werden (siehe z.B. [LOFTIN 80]).

Wir halten fest:

5. Die Startrollstrecke kann verkürzt werden, wenn  $C_{L,max}$  vergrößert wird.  $C_{L,max}$  kann vergrößert werden, wenn die Klappen (weiter) ausgefahren werden. Dadurch steigt aber auch der Widerstand. Diese Maßnahme hat zur Folge, daß die Steigrate geringer wird. Es kann zu einem Konflikt mit anderen Anforderungen an die Startflughahn kommen (Bild 1).
6. Die Startrollstrecke ist proportional zum Quadrat der Flugzeugmasse  $m$

$$s_G \propto m^2 \quad .$$

7. Der Schub ist proportional zur Luftdichte  $\rho$ . Damit gilt

$$s_G \propto \frac{1}{\rho^2} \quad .$$

Die Luftdichte  $\rho$  ist gering, wenn die Lufttemperatur hoch. Ebenso ist die Luftdichte gering wenn der Flugplatz in großer Höhe liegt. Man spricht von "**hot and high**", wenn beide Effekte zusammen treffen. Die Start(roll)strecke kann dann sehr lang werden.

Bei Transportflugzeugen geht es aufgrund der Punkte 6. und 7. in der Praxis der Flugvorbereitung für den Start im wesentlichen um die Frage: **Welche Abflugmasse kann bei gegebener Startbahn und gegebener Lufttemperatur realisiert werden?** Je größer die Startmasse, desto mehr Geld kann die Luftverkehrsgesellschaft einnehmen.

## 9 Berechnung der Startrollstrecke (2) - variabler Widerstand und Auftrieb

Eine bekannte Approximation zur Berechnung der Startrollstrecke aus Grundgleichung (4) vernachlässigt die Windgeschwindigkeit  $v_w = 0$  und nimmt wiederum einen konstanten durchschnittlichen Schub  $T = T(v_{av})$  während des Startlaufes an. Jedoch werden Auftrieb  $L$  und

Widerstand  $D$  nach Gleichung (8) - also proportional zu  $v^2$ - in die Grundgleichung (4) eingesetzt<sup>2</sup>:

$$s_G = m \cdot \int \frac{v}{T - \frac{\rho}{2} v^2 C_D S - \mu \cdot mg - \mu \frac{\rho}{2} v^2 C_L S - mg \sin \gamma} dv \quad . \quad (16)$$

Um dimensionslose Parameter *Flächenbelastung* (**wing loading**)  $m/S$  sowie *Schub-Gewichtsverhältnis* (**thrust to weight ratio**)  $T/(m \cdot g)$  zu erhalten, klammern wir im Nenner des Integrals  $m \cdot g$  aus:

$$s_G = \frac{1}{g} \cdot \int \frac{v}{\frac{T}{mg} - \frac{\rho}{2g} v^2 C_D \frac{S}{m} - \mu - \mu \frac{\rho}{2g} v^2 C_L \frac{S}{m} - \sin \gamma} dv \quad . \quad (17)$$

Wir fassen gleiche Terme zusammen: Terme mit  $v^2$  und Terme ohne  $v^2$ :

$$s_G = \frac{1}{g} \cdot \int \frac{v}{\frac{T}{mg} - \mu - \sin \gamma - \frac{\rho}{2g} \cdot \frac{S}{m} v^2 (C_D - \mu C_L)} dv \quad . \quad (18)$$

Als Vorbereitung für die Integration wird  $v^2$  isoliert und die Gleichung noch einmal umgeformt:

$$s_G = \frac{1}{\frac{\rho}{2} \cdot \frac{S}{m} (C_D - \mu C_L)} \cdot \int \frac{v}{\frac{\frac{T}{mg} - \mu - \sin \gamma}{\frac{\rho}{2g} \cdot \frac{S}{m} (C_D - \mu C_L)} - v^2} dv \quad (19)$$

$$s_G = \frac{2 \cdot (m/S)}{\rho (C_D - \mu C_L)} \cdot \int \frac{v}{\frac{2 \cdot g \cdot (m/S) \cdot \left( \frac{T}{m \cdot g} - \mu - \sin \gamma \right)}{\frac{\rho}{2} (C_D - \mu C_L)} - v^2} dv \quad . \quad (20)$$

Gleichung (20) hat die Form  $2b \int \frac{v}{a^2 - v^2} dv$  und kann mit Hilfe von z.B. [BRONSTEIN 79] integriert werden:

$$2b \int \frac{v}{a^2 - v^2} dv = 2b \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \ln(a^2 - v^2) = -b \cdot \ln(a^2 - v^2) \quad (21)$$

$$-b \left[ \ln(a^2 - v^2) \right]_0^{v_{LOF}} = -b \left( \ln(a^2 - v_{LOF}^2) - \ln(a^2 - 0^2) \right) = \quad (22)$$

<sup>2</sup> Zur Vereinfachung der Schreibweise wurde der Index "G" für "Bodeneffekt" bei den Beiwerten  $C_{L,G}$  und  $C_{D,G}$  in den Gleichungen (11) bis (18) fallen gelassen.

$$= -b \cdot \ln\left(\frac{a^2 - v_{LOF}^2}{a^2}\right) = -b \cdot \ln\left(1 - \frac{v_{LOF}^2}{a^2}\right) = b \cdot \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{v_{LOF}^2}{a^2}}\right) .$$

Einsetzen der ursprünglichen Variablen  $b$  und  $a^2$  ergibt die Startrollstrecke (zweite Gleichung)

$$s_G = \frac{(m/S)}{\rho(C_D - \mu C_L)} \cdot \ln \left( \frac{1}{1 - \frac{\frac{\rho}{2}(C_D - \mu C_L) \cdot v_{LOF}^2}{g \cdot (m/S) \cdot \left(\frac{T}{m \cdot g} - \mu - \sin \gamma\right)}} \right) . \quad (23)$$

Der Schub  $T$  in Gleichung (23) ist ein mittlerer Schub, der wiederum für eine Anströmgeschwindigkeit  $v_{av}$  nach Gleichung (7) berechnet wird.

## 10 Berechnung der Startrollstrecke (3) - numerische Integration der Differentialgleichung

1. Schritt: Ausgegangen wird von Gleichung (1) dargestellt hier in der Form

$$\frac{dv_G}{dt} = \frac{1}{m}(T - D - F_f) - g \cdot \sin \gamma . \quad (24)$$

Es handelt sich um ein Anfangswertproblem beschrieben durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung der Form  $\frac{dv_G}{dt} = f(t, v_G)$ . Diese Differentialgleichung soll hier mit dem einfachsten Integrationsalgorithmus gelöst werden - dem Euler Verfahren:

$$v_{G,n+1} = v_{G,n} + \Delta t \cdot f_n(t_n, v_{G,n}) . \quad (25)$$

Dabei ist

$$f_n = \frac{1}{m}(T_n - D_n - F_{f,n}) - g \cdot \sin \gamma . \quad (26)$$

Die Anfangsbedingung lautet  $v_{G,0} = 0$ . Im 1. Schritt wurde die Funktion  $v_G(t)$  berechnet. Da wir aber an der Rollstrecke interessiert sind fehlt noch ein ...

2. Schritt: Es muß die Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dt} = v_G(t) \quad (27)$$

gelöst werden. Dies geschieht genauso wie bereits im 1. Schritt erklärt. Das Euler-Verfahren liefert

$$s_{n+1} = s_n + \Delta t \cdot v_{G,n} \quad (28)$$

Die Anfangsbedingung lautet  $s_0 = 0$ . Für den Rechnungsgang wird zweckmäßigerweise eine Tabelle erstellt. **Tabelle 3** gibt Hinweise zum Erstellen und Ausfüllen einer derartigen Tabelle.

**Tabelle 3:** Numerische Integration zur Startrollstrecke mit Hilfe des Euler-Verfahrens

$n$	$t_n$	$v_{G,n}$	$T_n$	$D_n$	$F_{f,n}$	$f_n$	$s_n$
Bestimmungs- gleichung $\rightarrow$	$t_{n+1} =$ $t_n + \Delta t$	$v_{G,n+1} =$ $v_{G,n} + \Delta t \cdot f_n$	<b>Triebwerks- kennfeld</b> oder Bild 5	Gl. (8)	Gl. (3)	Gl. (26)	$s_{n+1} =$ $s_n + \Delta t \cdot v_{G,n}$
<b>0</b> <b>Anfangs- bedingungen</b>	0 ↓	$v_{G,0} = 0$	$T_0$ (Startschub)	0	$\mu \cdot m \cdot g$	$\frac{T_0}{m} - \mu \cdot g$ $- g \sin \gamma$	$s_0 = 0$ ↓
1	...	...	...	...	...	...	...
2	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
<b>Ende</b>	...	<b>wenn</b> $v_{G,Ende} \geq$ $v_{LOF} - v_W$	-	-	-	-	<b>dann</b> $s_{Ende} = s_G$ (evtl. interpolieren)

Die Tabelle wird von oben nach unten und von rechts nach links ausgefüllt, indem die Werte nach den oben in der Tabelle angegebenen Gleichungen berechnet werden. Der Berechnungsgang endet, wenn die Geschwindigkeit in der Spalte " $v_{G,n}$ " die erforderliche Rollgeschwindigkeit  $v_{LOF} - v_W$  überschreitet. Je kleiner die Integrationsschrittweite  $\Delta t$  gewählt wird, desto genauer wird die Rechnung und je genauer kann die Abhebebedingung  $v_G = v_{LOF} - v_W$  durch zwei aufeinanderfolgende Schritte eingegrenzt werden.

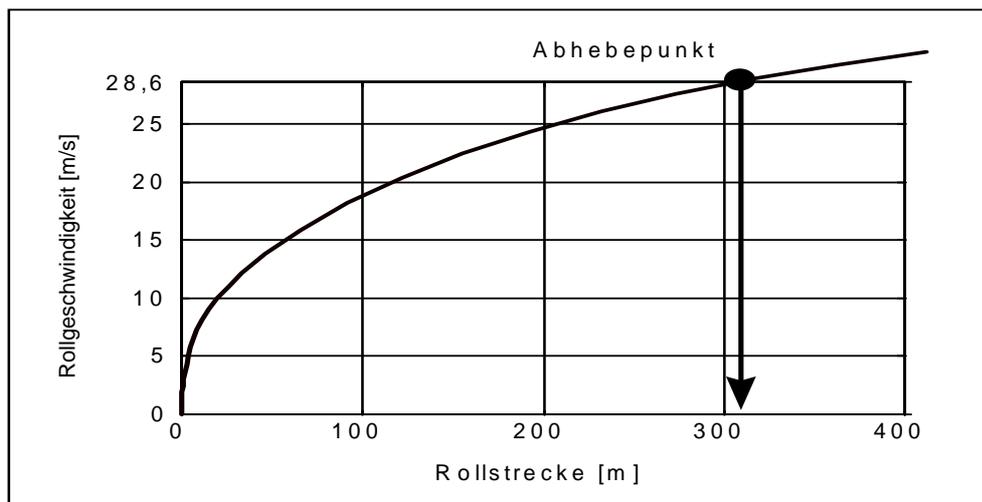
## 11 Beispiel

Im folgenden Beispiel soll die Startrollstrecke einer Cessna 172 berechnet werden. Im Flughandbuch der Cessna ist die Startrollstrecke angegeben, wie in Flugversuchen des Herstellers bei der Zulassung erflogen.

Zunächst wird die Startrollstrecke durch numerische Integration ermittelt. Tabelle 3 zeigt das Prinzip des Verfahrens, jedoch wird die Lösung nur mit beträchtlichem rechnerischem Aufwand erreicht. Die Nutzung einer Tabellenkalkulation oder einer Programmiersprache ist erforderlich. Besser noch ist ein Simulationsprogramm, denn ein Simulationsprogramm enthält die Integrationsalgorithmen bereits. Sowohl Hochschul- wie auch Industriestandard ist MATLAB<sup>®</sup> der Firma MathWorks. Sämtliche Gleichungen des Problems werden in ein sogenanntes "m-file" eingegeben. Die Gleichungen dürfen  $v_G$  enthalten, obwohl  $v_G$  ja erst durch die Integration aus  $\frac{d}{dt}v_G$  bestimmt wird. Die Integration übernimmt das Kommando `ode23`

```
[t,y]=ode23('fsG',0,25,[0 0]) .
```

Dieses Kommando ruft das "m-file" auf. Für das "m-file" wurde hier der Name `fsG.m` gewählt. `ode23` führt die numerische Integration durch und liefert einen Zeitvektor  $t$  sowie einen Lösungsvektor  $y$ , der Rollgeschwindigkeit und Strecke als Funktion der Zeit enthält. Integriert wird von 0s bis zu 25s. Der Anfangswert der Geschwindigkeit  $v_G$  beträgt 0 m/s, der Anfangswert des Weges 0 m. Die Eingangswerte für die Rechnung können ebenfalls dem "m-file" entnommen werden. Das "m-file" ist im Anhang abgedruckt. Für die Eingangsparameter liefert die Integration die Ergebnisse gemäß **Bild 6 und 7**.



**Bild 6:** Berechnung der Rollstrecke  $s_G = 306$  m einer Cessna 172 mit numerischer Integration. Eingangsparameter gemäß "m-file" im Anhang

Die Berechnung des Schubes erfordert gewisse Annahmen auf die hier nicht eingegangen wird. Für eine mittlere Anströmgeschwindigkeit  $v_{av} = 20,2$  m/s nach Gleichung (7) kann ein mittlerer Schub  $T$  von 2100 N berechnet werden. Damit liefert (für Windstille und Betonbahn):

- die Abschätzgleichung zur Berechnung der Rollstrecke, Gleichung (15):  $s_G = 232$  m ;
- die erste Gleichung zur Berechnung der Rollstrecke, Gleichung (5):  $s_G = 298$  m ;
- die zweite Gleichung zur Berechnung der Rollstrecke, Gleichung (23):  $s_G = 309$  m .
- Das Flughandbuch gibt 264 m an.

<u>Rechnung:</u>				<u>Flughandbuch:</u>			
$v_w$ [kt]	Startrollstrecke $s_G$ [m]			$v_w$ [kt]	Startrollstrecke $s_G$ [m]		
	Beton	Gras-Zuschlag	Gras		Beton	Gras-Zuschlag	Gras
0	<b>306</b>	17,3%	<b>359</b>	0	<b>264</b>	7,0%	<b>282</b>
$s_G$ -Verkürzung	0,73	←		0,82	→	0,71	
10	<b>223</b>	13,9%	<b>254</b>	10	<b>187</b>	7,0%	<b>200</b>
$s_G$ -Verkürzung	0,51	←		0,65	→	0,47	
20	<b>157</b>	12,1%	<b>176</b>	20	<b>123</b>	7,0%	<b>132</b>
		↑					
		20,0% nach <u>JAR</u> : AMC OPS 1.530(c)(4)					

**Bild 7:** Berechnung der Rollstrecke einer Cessna 172 mit numerischer Integration. Eingangsparmeter gemäß "m-file" im Anhang. Für den Start auf der Grasbahn wurde  $\mu = 0.05$  angesetzt. Es wurden nur 50% der angegebenen Gegenwindgeschwindigkeit in der Rechnung berücksichtigt (gemäß JAR-OPS 1.530(c)(6) sowie FAR 121.177(b) )

#### Bemerkungen zum Beispiel:

- Bei Propellerflugzeugen ohne Blattverstellung sind die Ergebnisse stark von den Annahmen und Angaben über Motorleistung und Propellerwirkungsgrad abhängig.
- Die Abschätzgleichung (15) sollte nicht verwandt werden. Sie liefert eine zu niedrige Startrollstrecke.
- Ein (vermeintlicher) Genauigkeitsgewinn erfordert überproportional viel Rechenaufwand.
- In der Praxis ist bei Flugzeugen dieser Klasse die Startrollstrecke oft länger als im Flughandbuch angegeben.

## 12 Literatur

- [AS-5263] US Navy: *Naval Air Systems Command Specification, Guidelines for the Preparation of Standard Aircraft Characteristics Charts and Performance Data, Piloted Aircraft (Fixed Wing)*, 1986. - Vertrieb: NTIS\*; Auszüge in [ROSKAM 91]
- [CURREY 88] CURREY, N.S.: *Aircraft Landing Gear Design: Principles and Practices*, Washington D.C. : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1988.
- [FARxx] U.S. DEPARTMENT FOR TRANSPORTATION, FEDERAL AVIATION ADMINISTRATION: *Federal Aviation Regulations*, Wahington, D.C. - Vertrieb: Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Wahington, D.C. 20402

- [HOAK 78] HOAK, D.E.: *USAF Stability and Control Datcom*, Wright-Patterson Air Force Base, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Flight Control Division, Ohio, 1978. - Vertrieb: NTIS\*; Auszüge in [ROSKAM 90]
- [JARxx] Joint Aviation Authorities: *Joint Aviation Requirements*. - Vertrieb: Civil Aviation Authority, 37 Gratton Road, Cheltenham, Gloucestershire, GB - GL502BN
- [KOHLMAN 92] KOHLMAN, D.L.; SCHWEIKHARD, W.G.: *Flight Test Principles and Practices*, Kansas : University of Kansas, Division of Continuing Education, 1992. - Lecture Notes
- [LOFTIN 80] LOFTIN, K.: *Subsonic Aircraft: Evolution and the Matching of Size to Performance*, NASA Reference Publication 1060, 1980
- [McCORMICK 79] McCORMICK, B.W.: *Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics*, New York : Wiley, 1979
- [MIL-C-005011B] USAF: *Military Specification, Charts: Standard Aircraft Characteristics and Performance, Piloted Aircraft (Fixed Wing)*, 1977. - Vertrieb: NTIS\*; Auszüge in [ROSKAM 91]
- [ROSKAM 90] ROSKAM, J.: *Airplane Design, Part VI: Preliminary Calculation of Aerodynamic, Thrust and Power Characteristics*, Ottawa : Roskam Aviation and Engineering Corporation, 1990 - Vertrieb: DARcorporation, 120E. 9<sup>th</sup>, Suite 2, Lawrence KS 66044
- [ROSKAM 91] ROSKAM, J.: *Airplane Design, Part VII: Determination of Stability, Control and Performance Characteristics: FAR and Military Requirements*, Ottawa : Roskam Aviation and Engineering Corporation, 1991 - Vertrieb: DARcorporation, 120E. 9<sup>th</sup>, Suite 2, Lawrence KS 66044
- [TORENBEEK 88] TORENBEEK, E.: *Synthesis of Subsonic Airplane Design*, Delft : Delft University Press, 1988
- [WAGENMAKERS 91] WAGENMAKERS, J.: *Aircraft Performance Engineering*, New York : Prentice Hall, 1991

\* NTIS Dokumente können bezogen werden über:  
 Information Handling Services, Global Engineering Documents,  
 1990 M Street N.W., Suite 400, Washington, D.C. 20036

## Anhang

### "m-file" zur numerischen Integration<sup>3</sup>

```
function ydot = fsG(t,y)

% PARAMETER VON FLUGZEUG UND STARTBAHN
% =====

% Flugzeug: Cessna 172, (DEGYM)
% Fluegelprofil: NACA 2412
% Bei MTOW = 1043 kg:
% vR = 28.6 m/s   CAS: 64 mph (vLOF etwa= vR) => vLOF = 1.12*vS (o.k.)
% v2 = 31.3 m/s   CAS: 70 mph
% vS = 25.5 m/s   CAS: 57 mph                => v2   = 1.23*vS (o.k.)

% PROPELLER PARAMETER
% P      Triebwerksleistung [W]
% d      Propellerdurchmesser [m]
% n      Propellerdrehzahl beim Start [1/s]
% vc     Reisefluggeschwindigkeit [m/s]
% nc     Reiseflugdrehzahl [1/s]
% vJet   Propellerstrahlgeschwindigkeit [m/s]
% Abschätzung P nach Lycoming Eng. Performance:
% 92% BHP bei SL und 2400 rpm, Pmax=150PS
P      = 111855*0.92;
d      = 1.91;
n      = 40.0;   % 2400 rpm
vc     = 57.2;   % 128 mph
```

<sup>3</sup> Das %-Zeichen kennzeichnet Kommentarzeilen.

```

nc = 41.67; % 2500 rpm
vJet = 10.0; % angenommen

% GEOMETRIE und MASSE
% S Fluegelflaeche [m^2]
% b Spannweite [m]
% h Abstand der Fluegel vom Boden [m]
% alpha Anstellwinkel (i.d.R. aus Rollgeometrie) [deg]
% m Startmasse [kg]
S = 16.3;
b = 10.97;
h = 1.8;
alpha = 5.0;
m = 1043; % MTOW

% AERODYNAMIK
% e Oswald's efficiency factor [-]
% CD0 Widerstand bei Auftrieb von Null [-]
% CL0 Auftrieb bei Anstellwinkel von Null [-]
e = 0.74; % gemessen
CD0 = 0.10; % Abschaetzung
CL0 = 0.2; % aus Profilkatalog

% STARTBAHN
% rho Luftdichte [kg/m^3]
% mu Widerstandsbeiwert der Rollreibung [-]
% gamma Steigung der Startbahn [deg]
% vW Gegenwindgeschwindigkeit (neg. Wert => Rueckenwind) [m/s]
rho = 1.225; % ICAO,SL
mu = 0.02;
gamma = 0.;
vW = 0.; % 0 kt
%vW = 2.57; %10 kt nach AFM davon 50% ansetzen
%vW = 5.14; %20 kt nach AFM davon 50% ansetzen

% SIMULATIONS-GLEICHUNGEN UND PARAMETER
% =====

% Allgemeine Parametern
pi = 3.1415926;
g = 9.81;
Lambda = b^2/S;
alphaRad = alpha*pi/180;
gammaRad = gamma*pi/180;
Jopt = vc/(nc*d);

% Anstroemgeschw. v=vG+vW
% vG=y(1) Rollgeschwindigkeit (gegenueber der Startbahn) [m/s]
vG = y(1);
v = vG + vW;

% Schub T eines Fixed Pitch Propellers
J = v/(n*d);
Jrel = J/Jopt;
eta = -7.982*Jrel^5 +25.93*Jrel^4 -31.6*Jrel^3 +17.0*Jrel^2 -3.0*Jrel +0.47;
if Jrel < 0.2
    eta = 0.3361;
end;
T = eta*P/(vG + vJet/2.0);

% Auftrieb L
CL = CL0 + 2*pi*alphaRad;
L = rho/2*v^2*CL*S;

% Widerstand D
phi = (16*h/b)^2/(1+(16*h/b)^2);
CD = CD0 + phi*CL^2/(pi*e*Lambda);
D = rho/2*v^2*CD*S;

% Rollreibung Ff
Ff = mu*(m*g*cos(gamma)-L);

% Beschleunigung aG=ydot(1)
ydot(1) = 1/m*(T-D-Ff)-g*sin(gamma);

% Geschwindigkeit vG=sGdot=ydot(2)
ydot(2) = y(1);

```